

Ma4A - Examen oral de maturité - juin 2023

Préparation

- Un examen oral peut difficilement se préparer au dernier moment. Il est nécessaire d'anticiper. Vous pouvez par exemple produire une fiche personnelle manuscrite par sujet.
- Soyez attentifs de travailler dans le « bon ordre », à savoir :
 - savoir énoncer et illustrer les définitions importantes ;
 - concernant les théorèmes à préparer :
 1. savoir les énoncer, en identifiant clairement hypothèses et conclusions ;
 2. savoir illustrer par des un ou plusieurs exemples graphiques et/ou algébriques ;
 3. savoir expliquer l'intérêt du résultat (« pourquoi en a-t-on parlé ? ») ;
 4. comprendre d'abord l'idée générale de la démonstration, puis les détails plus techniques ;
 5. être capable de justifier chaque passage, soit en s'appuyant sur les hypothèses, soit sur des définitions ou autres résultats connus et démontrés/admis ;
- Les outils suivants peuvent vous aider :
 - votre table numérique contient des informations importantes (personnelle, sans aucune annotation, surlignage et signets autorisés) ;
 - la calculatrice (non programmable, non graphique) permet de vérifier/explorer/ ... ;
 - le site <http://edugemath.ch> propose de nombreux contenus utiles ;
 - la chaîne <https://www.youtube.com/user/delleyjm> contient des vidéos.
- Vous pouvez vous organiser entre vous, partager les documents, demander une salle pour vous exercer « à blanc », ...

Déroulement

1. Dans tous les cas (même si vous pensez qu'il y a du retard !), vous vous présentez à l'heure prévue et vous attendez devant la porte jusqu'à ce qu'on vienne vous chercher.
2. Dès votre entrée, vous choisissez au hasard une enveloppe parmi au moins trois. Chaque question contient une partie « théorie » et une partie « exercice ». Les deux sont issues de sujets essentiellement différents. Vous n'êtes pas autorisé-e à retirer une question.
3. Vous avez 20 minutes de préparation. Du papier quadrillé est à votre disposition, ainsi que votre table non annotée et votre calculatrice non graphique et non programmable. Vous rédigez sur cette feuille ce que vous présenterez ensuite ; ce(s) document(s) seront conservée par le maître.
4. Vous présentez et commentez durant 20 minutes les documents que vous avez préparés. Vous êtes libres de commencer par le sujet théorique ou l'exercice. Le juré est un-e personne extérieure au collège.

Matériel autorisé

Table CRM sans annotations et calculatrice TI 30X Pro personnelles.

Critères pour bien réussir un examen oral

- être capable d'énoncer un théorème, une définition, de présenter une notion (correctement, complètement, en utilisant de bonnes notations)
- être capable d'illustrer la notion, le théorème, la définition, de donner un exemple numérique et/ou graphique ;
- être capable de donner du sens à la notion, au théorème, à la définition et de la/le replacer dans son contexte ;
- être capable de démontrer le théorème en donnant des arguments mathématiques pour chaque étape ;
- savoir résoudre l'exercice en mobilisant les bons outils et en pouvant expliquer la démarche et les calculs ;
- être à l'aise quant aux connaissances mathématiques de portée générale susceptibles d'intervenir dans la présentation/discussion ;
- pouvoir interagir en direct avec le maître ou le juré ;
- être à l'aise dans la prise de parole et dans l'expression, dans l'attitude corporelle, etc.

LISTE COMPACTE POUR LA THÉORIE

Version longue avec des liens potentiellement utiles vers des fiches-résumés et des vidéos » :

https://edugemath.ch/4e/preparer-la-matu/ma4a/ma4a_2022_oralmatu_champ-long.pdf

I : Analyse

1. Théorème $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et repr. grap. de la fct f définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

Illustrer graphiquement le lien entre ce résultat et la dérivée de la fonction \sin en 0.

2. Présenter les notions de dérivée en un point et de fonction dérivée d'une fonction f ; interpréter graphiquement.

Illustrer avec f définie par $f(x) = \sqrt{x}$.

Comparer le domaine de définition de f et de f' . Expliquer graphiquement et algébriquement.

3. Dérivée de la fonction f définie par $f(x) = x^n$ (par récurrence pour n naturel ; pour n entier, rationnel.).
4. Dérivées des fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente.
5. Énoncer et démontrer le théorème des accroissements finis ; interpréter graphiquement.
6. Énoncer sans le démontrer le Théorème des accroissements finis et interpréter graphiquement.

Énoncer sans le démontrer le Corollaire du théorème des accroissements finis.

Énoncer et démontrer la relation entre « f constante sur I » et « $f'(x) = 0$ sur I ».

7. Énoncer et démontrer le théorème fondamental I.

Énoncer sans le démontrer le Théorème fondamental II (Théorème de Newton-Leibnitz) et expliquer son utilité avec un exemple.

8. Pour $x > 0$, on définit la fonction F par $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$

Énoncer les propriétés de F pour la représenter graphiquement

Démontrer que $F(xy) = F(x) + F(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

9. Le nombre e (définition, estimation de la valeur) et la fonction exponentielle \exp (définition, représentation graphique).

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Démontrer que $(e^x)' = e^x$.

II : Géométrie vectorielle

10. Présentation : équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes d'une droite du plan, d'un plan de l'espace, d'une droite de l'espace à partir de vecteurs directeurs et de vecteurs normaux.

11. Présentation : définition du produit scalaire entre deux vecteurs dans le plan ou dans l'espace.

Théorème "Relation entre orthogonalité et produit scalaire" dans le plan.

Théorème "Produit scalaire en composantes" dans le plan.

12. Théorèmes "Vecteur projection dans le plan" et « Distance entre un point et une droite dans le plan ».

13. Produit vectoriel : définition, utilité,

Théorème "Produit vectoriel en composantes"

Utilité pour déterminer l'équation d'un plan.

III : Nombres complexes

14. Définir les nombres complexes et présenter les trois écritures possibles.

Montrer avec les séries entières que $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$

Interpréter géométriquement le produit de deux nombres complexes.

15. Énoncer et démontrer la formule de De Moivre (et principe de la démonstration de la formule pour $\cos(a+b)$).

Illustrer avec l'équation $z^6 = 1$.

IV : Suites et séries

16. Définir la notion de série numérique et de série entière. Convergence d'une série numérique, rayon de convergence d'une série entière.

Énoncer et démontrer le critère de divergence.

Rayon de convergence de la série $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$

17. Définir la notion de série numérique et de série entière. Convergence d'une série numérique, rayon de convergence d'une série entière.

Énoncer et démontrer le critère du quotient.

Rayon de convergence de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

18. Développement en série de la fonction f définie par $f(x)=\ln(1+x)$ en utilisant celui de la fonction g définie par $g(x)=\frac{1}{1-x}$. La série converge-t-elle pour $x=1$? En déduire la somme de la série harmonique alternée.

19. Le nombre e . Définition.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Montrer que e est irrationnel [à venir]

V : Algèbre linéaire

20. Théorème « Matrice d'une application linéaire ».

Déterminer les matrices des homothéties centrées en O , des rotations centrées en O , des symétries d'axes simples et des projections sur un axe simple.

21. Théorème $L(\vec{0}) \neq \vec{0} \Rightarrow L$ non linéaire et sa contraposée. Qu'en est-il de la réciproque?

Théorème « Matrice de la réciproque d'une application linéaire ».

22. Définir les notions de valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et base propre.

Énoncer et démontrer le théorème « Polynôme caractéristique ».

Utilité de travailler avec une base propre ; diagonalisation d'une matrice.

VI: Probabilités

23. Énoncer les axiomes de la probabilité d'un événement aléatoire.

Démontrer que $p(\emptyset)=0$, $p(\bar{A})=1-p(A)$ et $p(A \cup B)=p(A)+p(B)-p(A \cap B)$

24. Expérience de Bernoulli - loi binomiale : définition, explication de la formule, illustration.

Espérance et variance de la loi binomiale.

LISTE COMPACTE POUR LES EXERCICES

(voir aussi les pages « Bilans de fin de chapitre »)

I : Analyse

- Calculs de limites (indéterminations diverses : $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; $0 \cdot \infty$; $\infty - \infty$; ...), limites de fonctions trigonométriques
- Interprétation graphique de calculs de limites
- Déterminer l'équation d'une tangente
- Calculer la dérivée en un point et la fonction dérivée de fonctions simples avec la définition
- Calculer la dérivée de fonctions avec les formules de dérivation, en particulier en utilisant la formule « dérivée d'une composition de fonctions »
- Résoudre des problèmes d'optimisation
- Déterminer les asymptotes verticale et horizontale d'une fonction
- Rechercher les maxima, minima, points d'inflexion et asymptotes d'une fonction ; déterminer les intervalles de croissance / décroissance, concavité / convexité ; esquisser une représentation graphique. Etudier une fonction simple
- savoir déterminer une ou plusieurs ou toutes les primitives d'une fonction donnée ; en particulier les méthodes d'intégration par parties, par substitution/changement de variable et qui utilisent les fonctions trigonométriques réciproques, ln ou exp ;
- savoir déterminer une primitive d'une fonction donnée vérifiant une condition donnée ;
- savoir calculer à la main une intégrale définie et vérifier la réponse avec la calculatrice;
- savoir calculer l'aire d'une surface délimitée par des courbes représentatives ;
- pouvoir déterminer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle donné ; savoir utiliser le théorème de la moyenne pour résoudre des problèmes ;
- savoir calculer le volume d'un solide de révolution ;
- savoir calculer une longueur d'arc ;
pour une fonction f donnée (graphiquement ou algébriquement) et pour un nombre a donné, savoir représenter graphiquement une fonction d'accumulation $F(x) = \int_a^x \frac{1}{t} dt$;
- avec des fonctions des fonctions ln/exp, \log_a/\exp_a : calculer dérivée et deuxième dérivée, résoudre des problèmes d'optimisation, étudier une fonction, calculs d'aire, de volumes de révolution, de longueurs d'arc, problèmes de (dé)croissance exponentielle ;

II : Géométrie vectorielle

- Résoudre à l'aide du calcul vectoriel des problèmes de géométrie du plan

- Représenter graphiquement la somme, la différence de deux vecteurs du plan, le produit d'un vecteur du plan par un scalaire, une combinaison linéaire de vecteurs
- Calcul vectoriel dans le plan et l'espace:
 - calculs avec les 5 opérations : +, -, multiplication par un scalaire, pr. scalaire, pr vectoriel
 - déterminer le vecteur entre deux points
 - calculer la norme d'un vecteur
 - déterminer si deux vecteurs sont colinéaires ou non
 - déterminer un vecteur unitaire colinéaire à un vecteur donné
 - déterminer si un vecteur est ou pas combinaison linéaire de vecteurs donnés; si oui, déterminer cette combinaison linéaire
 - déterminer si trois points sont alignés ou non
 - calculer l'angle entre deux vecteurs, l'aire d'un triangle/d'un parallélogramme
 - déterminer si deux vecteurs sont orthogonaux ou non
 - déterminer un vecteur colinéaire/normal à un vecteur donné
 - déterminer un vecteur directeur/normal à une droite donnée
 - déterminer les composantes d'un vecteur projection
 - calculer la distance d'un point à une droite
 - déterminer si deux droites/plans sont parallèles, perpendiculaires
- dans le plan:
 - déterminer si trois vecteurs sont coplanaires ou non
 - déterminer l'équation vectorielle et cartésienne d'une droite à partir de deux points/un point et un vecteur directeur
- dans l'espace:
 - déterminer un vecteur directeur/normal à un plan donné
 - déterminer l'équation vectorielle et cartésienne d'un plan à partir de:
 - trois points/un point et deux vecteurs directeurs
 - déterminer l'équation vectorielle d'une droite à partir de:
 - deux points/un point et un vecteur directeur
 - déterminer les équations cartésiennes d'une droite à partir de:
 - deux points/un point et un vecteur directeur
 - calculer la distance d'un point à un plan, entre deux plans parallèles.
 - utiliser le produit mixte pour calculer le volume d'un tétraèdre et la distance entre deux droites gauches.
 - connaître l'équation d'une sphère, savoir déterminer le centre et le rayon d'un sphère donnée.
 - savoir résoudre des exercices variés impliquant des plans, des droites et des sphères (en particulier : droites et plans tangents à une sphère).

III : Nombres complexes

- savoir effectuer des calculs élémentaires dans \mathbb{C} (somme, différence, produit, quotient, puissance et racineS) et interpréter géométriquement ;
- connaître les différentes formes (cartésienne, trigonométrique et exponentielle) d'un nombre complexe, savoir passer de l'une à l'autre et utiliser la bonne forme pour la tâche à effectuer ;
- résoudre des équations et factoriser dans \mathbb{R} et \mathbb{C} ;
- calculer des racines de l'unité ;

IV : Suites et séries

- calculer la somme d'une série géométrique
- connaître la convergence des séries de base ;
- connaître et savoir utiliser les critères de convergence/divergence des séries numériques : critère de divergence, séries alternées (Leibnitz), comparaison, quotient (d'Alembert), racine (Cauchy), ;
- déterminer l'intervalle de convergence d'une série entière (recherche du rayon de convergence et étude particulière aux bords de l'intervalle) ;
- savoir utiliser les développements en série de MacLaurin pour résoudre des problèmes : approximation d'une valeur numérique (en contrôlant si possible l'erreur), d'une intégrale, calcul de limite.

V: Algèbre linéaire

- effectuer toutes les opérations du calcul matriciel élémentaire (addition, soustraction, multiplication, déterminant, inverse);
- déterminer si une application est linéaire ou pas;
- déterminer la matrice d'une application linéaire relativement à la base canonique;
- déterminer la matrice d'applications linéaires connues (rotations, symétries, homothéties, projections) relativement à la base canonique;
- interpréter géométriquement l'application linéaire associée à une matrice donnée;
- déterminer la composition d'applications linéaires et la matrice associée;
- déterminer la réciproque d'une application linéaire (si elle existe) et connaître le lien avec l'inverse de la matrice associée;
- déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire donnée et savoir les représenter graphiquement;
- calculer un polynôme caractéristique, des valeurs propres et des vecteurs propres; savoir les utiliser pour déterminer la nature géométrique d'une application linéaire;
- déterminer la matrice d'une application linéaire par rapport à des bases données (changement de base) ;
- déterminer une base propre (si elle existe) et l'utiliser pour diagonaliser une matrice;

VI: Probabilités

- résoudre des problèmes de combinatoire (permutations, arrangements, combinaisons)
- résoudre des problèmes de probabilités, de probabilités conditionnelles ;

- résoudre des problèmes d'indépendance d'événements aléatoires
- calculer une espérance mathématique, une variance, un écart-type ;
- résoudre des problèmes en utilisant la loi binomiale ;
- résoudre des problèmes en utilisant la loi normale ;
- résoudre des problèmes en utilisant une approximation de la loi binomiale par la loi normale.

Par ailleurs, vous devez aussi et toujours

- savoir justifier une affirmation mathématique par une démonstration de portée générale s'appuyant explicitement sur les définitions, propriétés et théorèmes vus au cours, ou savoir la réfuter par un contre-exemple précis ;
- présenter vos calculs, vos graphiques et vos raisonnements de manière claire et détaillée en indiquant toutes les étapes ;
- porter un regard critique sur vos résultats et les vérifier chaque fois que c'est utile.